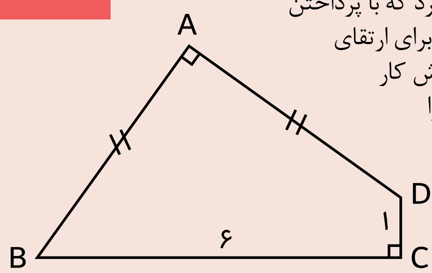
یک مسئله و چند راه‌حل

راه‌های جبری

● فاطمه معین‌الدین، جلال سرحدی و حسین کریمی

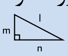
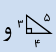
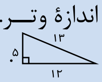
در ریاضیات شاخه‌های متفاوتی وجود دارند که استفاده از آن‌ها برای حل مسئله از جذابیت بالایی برخوردار است. مثلاً استفاده از جبر در حل مسئله‌های هندسی و یا استفاده از هندسه در حل مسئله‌های جبری، زیبایی کار را دو چندان می‌کند. در این قسمت از مجله سعی خواهیم کرد که با پرداختن به روش‌های متمایز حل مسئله، حواشی لازم برای ارتقای سطح آموزش ریاضی شما را فراهم کنیم. روش کار بدین صورت خواهد بود که ابتدا صورت مسئله را بیان خواهیم کرد و سپس مقدمات لازم برای حل آن را به روش‌های متفاوت فراهم می‌آوریم.

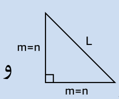


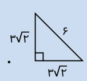
مسئله:
مساحت چهارضلعی ABCD را به‌دست آورید.

۱. حل مسئله به روش جبری

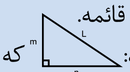
نکته:

۱. در مثلث قائم‌الزاویه، مجموع مجذور اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با مجذور اندازهٔ وتر. یعنی در مثلث  داریم: $m^۲ + n^۲ = L^۲$ مانند  و یا: .

۲. اگر مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین باشد، مانند:  و آنگاه: $m^۲ + n^۲ = \frac{۱}{۲}L^۲$ و یا به عبارت دیگر: $L = \sqrt{۲}m = \sqrt{۲}n$

مانند:  و یا: .

۳. مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه.

مانند:  که داریم: $S_\Delta = \frac{m \times n}{۲}$.

بنابراین مسئله به روش جبری این‌گونه حل می‌شود:

$$\Delta BCD(\hat{C}:۹۰^\circ) \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۱}} BC^۲ + CD^۲ = BD^۲ \Rightarrow BD = \sqrt{۳۷}$$

$$\Delta ABD(AD = AB, \hat{A} = ۹۰^\circ) \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۲}}$$

$$AB = AD = \frac{BD}{\sqrt{۲}} \Rightarrow AB = AD = \frac{\sqrt{۳۷}}{\sqrt{۲}}$$

$$S_{BCD} \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۳}} \frac{۱}{۲} \times BC \times CD = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱ = ۳$$

$$S_{ABD} \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۳}} \frac{۱}{۲} AB \times AD = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳۷}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۳۷}}{\sqrt{۲}} = \frac{۳۷}{۴}$$

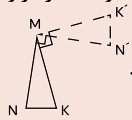
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{۳۷}{۴} + ۳ = \frac{۴۹}{۴}$$

۲. حل مسئله به روش دوران

در مسئله خواسته شده است، مساحت چهار ضلعی ABCD را به دست آوریم.

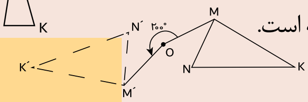
نکته:

الف) اگر شکلی را حول نقطه‌ای و تحت زاویه‌ای دوران دهیم، شکل دوران‌یافته برابر (هم‌نهشت) با شکل اولیه خواهد بود (اندازهٔ زاویه‌ها، اندازهٔ ضلع‌ها، محیط، مساحت و ... تغییری نمی‌کنند).

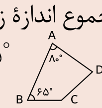
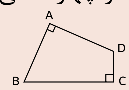


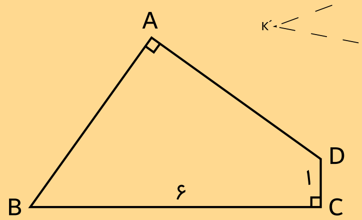
مانند شکل مقابل که در آن، مثلث $MN'K'$ حاصل دوران مثلث MNK حول مرکز M تحت زاویهٔ ۹۰ درجه است.

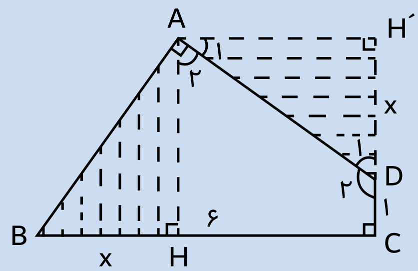
و یا: مانند شکل دوم که در آن، مثلث $MN'K'$ دوران‌یافتهٔ مثلث MNK تحت‌زاویهٔ ۲۰۰ درجه است.



ب) مجموع اندازهٔ زاویه‌های داخلی در هر چهار ضلعی برابر ۳۶۰ درجه است؛ با

مانند:  $\hat{C}+\hat{D}=215^\circ$ و یا:  $\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$.





● **راه‌حل اول**

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را حول نقطهٔ A تحت زاویهٔ ۹۰ درجه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا مثلث $\overset{\Delta}{ADH'}$ پدید آید. بنا به نکتهٔ الف داریم: $\overset{\Delta}{ABH}=\overset{\Delta}{ADH'}$ و در نتیجه: $BH=DH'$ و $AH=AH'$.

بنا به نکتهٔ ب داریم:

$$\hat{A}_2+\hat{D}_2=180^\circ \qquad (1)$$

اما از طرف دیگر می‌دانیم:

$$\hat{D}_1+\hat{A}_1=90^\circ \qquad (2)$$

و

$$\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ \qquad (3)$$

(AH' دوران یافتهٔ AH حول A تحت زاویهٔ ۹۰ درجه است.)

از (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم: $\hat{A}_2=\hat{D}_1$ که با توجه به (۱) داریم: $\hat{D}_1+\hat{D}_2=180^\circ$. یعنی CD و DH' در یک امتداد هستند و چون اندازهٔ زاویه‌ها در چهارضلعی $AHCH'$ ۹۰ درجه است و دو ضلع مجاور AH و AH' برابرند، نتیجه می‌گیریم که $AHCH'$ یک مربع است.

$$CH=CH' \Rightarrow (6-x)=(1+x)$$

$$\Rightarrow x=2/5 \Rightarrow \text{اندازهٔ ضلع مربع}=\frac{7}{2}$$

$$S_{ABCD}=S_{ABH}+S_{AHCD}=S_{AHCD}+S_{ADH'}$$

$$=S_{AHCH'}=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$$

● **راه‌حل دوم**

چهار ضلعی ABCD را حول نقطهٔ A تحت زاویهٔ ۹۰ درجه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا چهارضلعی $ADC'D'$ پدید آید.

با دوران ABCD حول A تحت زاویهٔ ۱۸۰ درجه $AD'C''D''$ حاصل می‌شود.

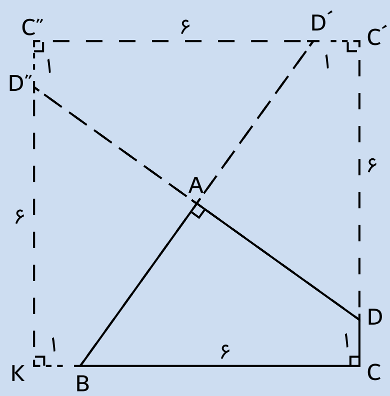
با دوران ABCD حول A تحت زاویهٔ ۲۷۰ درجه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت $AD''KB$ پدیدار می‌شود.

تمرین:

۱. ثابت کنید CD و DC' در یک امتداد و نتیجه بگیرید که $C'D'$ با $D'C''$ و نیز $C''D''$ با $D''K$ و در نهایت KB با BC در یک امتداد قرار دارند.

۲. نشان دهید $KCC'C''$ یک مربع است.

$$S_{ABCD}=\frac{1}{4}S_{KCC'C''}=\frac{1}{4}(7)^2=\frac{49}{4}$$



● **راه‌حل سوم**

در روش قبل فقط یک‌بار دوران ۹۰ درجه را انجام می‌دهیم که یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه خواهیم داشت:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}S_{BCC'D'}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{6+1}{2}\right)\times 7=\frac{49}{4}$$